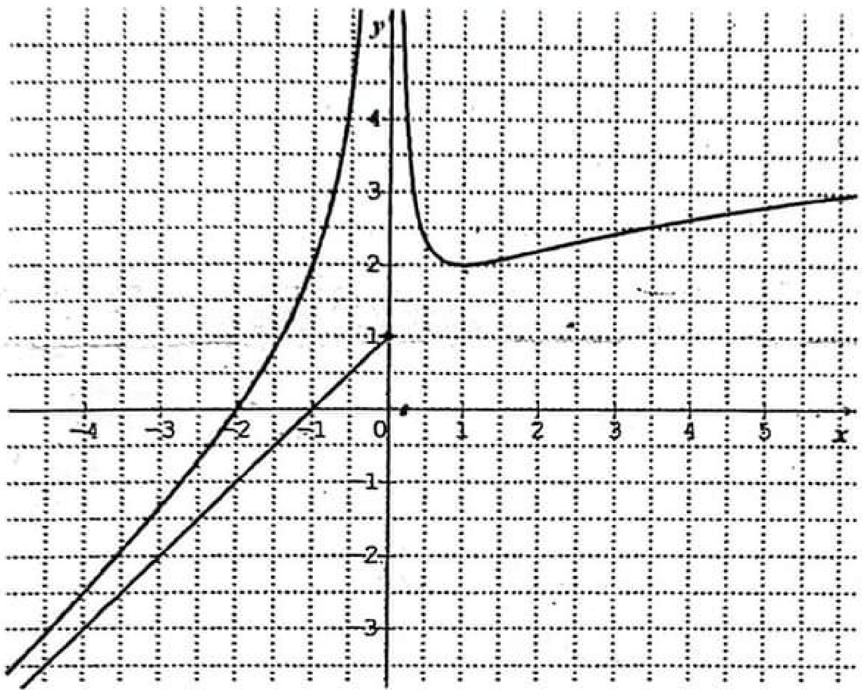
LYCEE LES ELITES 2 DE SOUSSE 7 / 11 / 2018	Devoir de Contrôle N°1 MATHEMATIQUES	CLASSE : 4 SC et Tech DUREE : 2 heures

Exercice N°1 (10 points)

Dans la figure ci-dessous :

- La courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.
- (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$
- (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$
- L'axe des ordonnées est une asymptote à (C)



1) A l'aide du graphique.

   a) Calculer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$, $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{\sin^2(f(x))}$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)\sin\frac{1}{f(x)}$.

   b) Déterminer le domaine de définition de fof.

   c) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{fof(x)}{f(x)}$.

2) Soit la fonction g définie sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$ par : $\begin{cases} g(x) = cosx.f\left(\frac{1}{cosx}\right) si\ x \in]\frac{\pi}{2},\pi] \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

   a) Montrer que g est continue sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$.

   b) g est elle continue à droite en $\frac{\pi}{2}$.

   c) Montrer que l'équation g(x)=0 admet au moins une solution dans $[\frac{\pi}{2},\pi]$

Exercice N°2 (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure de l'annexe ci-jointe A est le point d'affixe (-i) , a tout point M du plan d'affixe z ($z \neq -i$) on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z}{iz-1}$

1) a) Déterminer et construire sur la feuille annexe l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

b) Déterminer et construire sur la feuille annexe l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

c) Montrer que ($z' = ie^{i\frac{\pi}{4}}$) si et seulement si ($z = \frac{1}{2}(\tan\frac{\pi}{8} - i)$).

2) a) Vérifier que $z'+i = -\frac{1}{z+i}$.

b) Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}) \equiv \pi[2\pi]$ et que AMxAM'=1

c) En déduire que si $M \in [A,\vec{v})\setminus\{A\}$ alors le point $M' \in [A,\vec{v})\setminus\{A\}$. Et que si M est un point du cercle de centre A et de rayon 2 alors M' est un point d'un cercle qu'on caractérisera.

3) On pose $z = ie^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi[$.

a) Montrer que $z' = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

b) Déterminer la valeur de θ pour que M' soit un point du cercle de centre O et de rayon 1 .

4) On considère le cercle de (C) de diamètre [OA] sur le quel on désigne un point N distinct de O et de A. et les points K et L tel que ONKL soit un carrée direct.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_L}{z_N}$

b) Ecrire $\frac{z_L}{z_N}$ sous forme exponentielle .

5) a) Montrer que ($\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AM}$) si et seulement si ($iz^2 - 3z - i = 0$)

b) Vérifier que $iz^2 - 3z - i = i\left(z - \frac{\sqrt{5}-3i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{5}+3i}{2}\right)$

c) Déterminer alors les points M tels que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AM}$

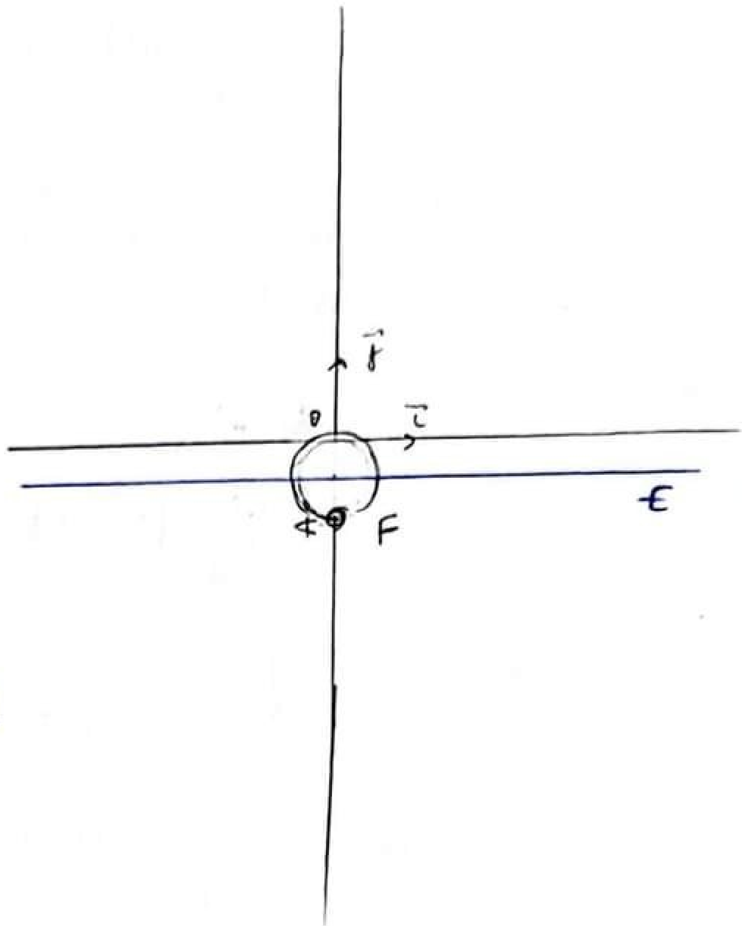
Ex 2 :

1a) soit $E = \{ M(z) \ / \ |z'| = 1$

$M(z) = 1 \Leftrightarrow |z'| = 1$

$\Leftrightarrow \left| \dfrac{z}{iz - 1} \right| = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|z|}{|iz - 1|} = 1$



$\Leftrightarrow \dfrac{|z|}{|i(z+1)|} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|z|}{\underbrace{|i|}_{1}\,|z+1|} = 1$

$\Leftrightarrow |z| = |z+1|$

$\Leftrightarrow |z_M| = |z_M - z_A|$

$\Leftrightarrow OM = AM$

$\Leftrightarrow M \in$ à la mediatrice de $[OA]$

d'où $E =$ med$[OA]$.

b) soit $F = \{M(z) \text{ tq } z' \text{ réel}\}$

$M(z) \in (F) \Leftrightarrow z'$ réel

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{iz-1}$ réel et $z \neq i$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{i(z+i)}$ réel et $z \neq i$

$\Leftrightarrow \dfrac{(-i)z}{\underbrace{(-i)i}_{1}(z+i)}$ réel et $z \neq -i$

$\Leftrightarrow \left[-i\left(\dfrac{z}{z+i}\right)\right]$ réel et $z \neq -i$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{z+i}$ imaginaire et $z \neq -i$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_M}{z_M - z_A}$ imag et $z_M \neq z_A$

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{OM})}{\text{aff}(\overrightarrow{AM})}$ imag et $M \neq A$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$ et $M \neq A$

$\Leftrightarrow M \in$ au $\mathcal{C}_{[OA]} \setminus \{A\}$

$\Leftrightarrow F = \mathcal{C}_{[OA]} \setminus \{A\}$

c) $z' = i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \frac{z}{iz-1} = i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = i e^{i\frac{\pi}{4}}(iz-1)$

$\Leftrightarrow z = -z e^{i\frac{\pi}{4}} - i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z + z e^{i\frac{\pi}{4}} = -i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}) = -i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}} + 1}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i0}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8})} + e^{i(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8})}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}})}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cos\frac{\pi}{8}\, e^{i\frac{\pi}{8}}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8})}}{2\cos\frac{\pi}{8}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i e^{i\frac{\pi}{8}}}{2\cos\frac{\pi}{8}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{-i(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})}{2\cos\frac{\pi}{8}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} - i\cos\frac{\pi}{8}\right]$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{8} - i\right)$

$z'+i = -1$

2a) $z'+i = \dfrac{z}{iz-1} + i$

$= \dfrac{z + i(iz-1)}{iz-1}$

$= \dfrac{z - z - i}{i(z+i)}$

$= \dfrac{-\cancel{i}}{\cancel{i}(z+i)} = \dfrac{-1}{z+i}$

b) on a $z'+i = \dfrac{-1}{z+i}$

donc $\arg(z'+i) \equiv \arg\left(\dfrac{-1}{z+i}\right) [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z'+i) \equiv \arg(-1) - \arg(z+i) [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(z_{H'} - z_A) \equiv \pi - \arg(z_H - z_A) [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AH'}) \equiv \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{AH}) [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AH'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AH}) \equiv \pi [2\pi]$

on a $z'+i = \frac{-1}{z+i}$

$\Rightarrow |z'+i| = \left|\frac{-1}{z+i}\right|$

$\Rightarrow |z'+i| = \frac{|-1|}{|z+i|}$

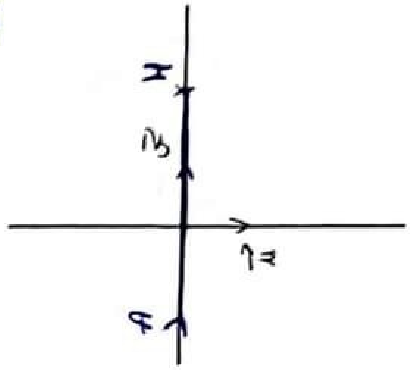
$\Leftrightarrow |z_{M'} - z_A| = \frac{1}{|z_M - z_A|}$

$\Leftrightarrow AM' = \frac{1}{AM} \Rightarrow AM' \times AM = 1$

c) si $M \in [A, \vec{v}) \setminus \{A\}$

donc $\vec{AM}$ et $\vec{v}$ sont col de m̂ sens et $M \neq A$

donc $(\vec{v}, \vec{AM}) \equiv 0 [2\pi]$



donc $(\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{AM}) \equiv 0 [2\pi]$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \vec{AM}) \equiv 0 [2\pi]$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + \underbrace{(\vec{u}, \vec{AM}) + (\vec{u}, \vec{AM'})} \equiv (\vec{u}, \vec{AM'}) [2\pi]$; $M' \neq A$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi \equiv (\vec{u}, \vec{AM'}) [2\pi]$; $M' \neq A$

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\vec{v}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{v}, \vec{AM'}) \equiv 0 [2\pi]$

$\Rightarrow \vec{AM'}$ et $\vec{v}$ sont coli de même sens

$\Rightarrow M' \in [A, \vec{v}) \setminus \{A\}$.

$\oplus$ si $M \in \mathcal{C}_{(A,2)} \Leftrightarrow AM = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{AM'} = 2$ (Car $AM \times AM' = 1$
$\rightarrow AM = \dfrac{1}{AM'}$)

$\Leftrightarrow 2AM' = 1$

$\Leftrightarrow AM' = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow M' \in \mathcal{C}_{(A,\frac{1}{2})}$

a) pour $z = i e^{i\theta}$; $\theta \in [0, \pi[$

on a $z' = \dfrac{i e^{i\theta}}{i(i e^{i\theta}) - 1}$

$= \dfrac{i \cdot e^{i\theta}}{-e^{i\theta} - 1}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{e^{i\theta} + e^{i0}}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]}$

$= \dfrac{-i e^{i\theta}}{2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}$

$= \dfrac{-i\, e^{i(\theta - \frac{\theta}{2})}}{2\cos\theta}$

$= \dfrac{-i\, e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\theta}$

$= \dfrac{e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\, e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}$

b) $M' \in \mathcal{C}_{(O,1)} \Leftrightarrow OM' = 1$

$$\Leftrightarrow |z'| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right| = 1$$

$$= \underbrace{\underbrace{\left| \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} \right|}_{\in \mathbb{R}}}_{\text{V absolue}} \times \underbrace{\left| e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right|}_{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|} = 1 \\ \theta \in [0, \pi[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ \theta \in [0, \pi[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{\in \mathbb{R}_+}| = \frac{1}{2} \\ \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

4 a) $\cancel{\frac{|z_L|}{|z_N|}}$ • $\left|\frac{z_L}{z_N}\right| = \frac{|z_L|}{|z_N|} = \frac{OL}{ON} = 1$ (car $ONKL$ carré $\rightarrow OL = ON$)

• $\arg\left(\frac{z_L}{z_N}\right) \equiv \arg(z_L) - \arg(z_N)\ [2\pi]$

$\equiv (\vec{u}, \vec{OL}) - (\vec{u}, \vec{ON})\ [2\pi]$

$\equiv (\vec{ON}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{OL})\ [2\pi]$

$\equiv (\vec{ON}, \vec{OL})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b) $\begin{cases} \left|\frac{z_L}{z_N}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_L}{z_N}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \rightarrow \frac{z_L}{z_N} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

5a) $\vec{OH'} = \vec{AH}$

$\Leftrightarrow \text{aff}(\vec{OH'}) = \text{aff}(\vec{AH})$

$\Leftrightarrow z_{H'} = z_H - z_A$

$\Leftrightarrow z' = z + i$

$\Leftrightarrow \frac{z}{iz+1} = z + i$

$\Leftrightarrow z = (z+i)(iz+1)$

$\Leftrightarrow z = iz^2 - z - z - i$

$\Leftrightarrow iz^2 - 3z - i = 0$

b) $i\left(z-\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}\right)\left(z+\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}\right)$

$=i\left(z^2+\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}z-\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}z-\left(\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}\right)\right]$

$=i\left(z^2+3iz-\left(\frac{(i\sqrt{5})^2-(3i)^2}{4}\right)\right]$

$=i\left(z^2+3iz-1\right)$

$=iz^2-3z-i$

c) $\vec{OM'}=\vec{AM}$

$\Leftrightarrow iz^2-3z-i=0$

$\Leftrightarrow i\left(z-\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}\right)\left(z+\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}=0 \\ \text{ou} \\ z+\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{i\sqrt{5}-3i}{2} \\ \text{ou} \\ z=-\frac{i\sqrt{5}+3i}{2} \end{cases}$

soit E et F les points d'affixes respectives $z_E=\frac{i\sqrt{5}-3i}{2}$ et $z_F=-\frac{i\sqrt{5}+3i}{2}$

$\{E,F\}$ est l'ensemble des point M tq $\vec{OM'}=\vec{AM}$.